

---

# **TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI**

Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

Studijní program: B2612 – Elektrotechnika a informatika

Studijní obor: 1234R567 – Elektronické informační a řídicí systémy

## **Numerické modelování a optimalizace systému adaptivní optiky**

## **Numerical modeling and optimization of the adaptive optics system**

### **Bakalářská práce**

|                |                              |
|----------------|------------------------------|
| Autor:         | <b>Alexey Kruchenko</b>      |
| Vedoucí práce: | doc. Ing. Pavel Mokrý, Ph.D. |
| Konzultant:    | Ing. Jan Václavík            |

**V Liberci 18. 5. 2012**

## **Prohlášení**

Byl jsem seznámen s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím bakalářské práce a konzultantem.

Datum: 18. 5. 2012.

Podpis:

## **Poděkování**

Děkuji vedoucímu bakalářské práce doc. Ing. Pavlu Mokrému, Ph.D.  
a konzultantu práce Ing. Janu Václavíku za jejich odbornou pomoc a další cenné rady  
při zpracování mé bakalářské práce.

## Abstrakt

Práce se zabývá realizací numerického modelu deformovatelného zrcadla v programu COMSOL. Na základě fyzikálních vlastností piezoelektrických materiálu (ze kterých se skládá deformovatelné zrcadlo) v prostředí COMSOL pomocí metody konečných prvků bude navrhnout optimální model.

Řešení dané úlohy umožní pochopit problematiku adaptivní optiky, ve které deformovatelné zrcadlo představuje nejdůležitější komponent adaptivního systému.

**Klíčová slova:** deformovatelné zrcadlo, piezoelektrické materiály, metoda konečných prvků, adaptivní optika.

## Abstract

The work deals with the realization of a numerical model of a deformable mirror in COMSOL. Based on the physical properties of a piezoelectric material (the deformable mirror consists of these materials) in the environment COMSOL, the finite element model will be optimally designed.

The solution of the task will help reader to understand the problems of the adaptive optics deformable mirror, which is the most important component of an adaptive system.

**Keywords:** deformable mirror, piezoelectric materials, finite element method, adaptive optics.

# Obsah

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Abstrakt .....</b>  | <b>5</b>  |
| <b>Seznam ilustrací.....</b>                                       | <b>7</b>  |
| <b>Seznam symbolů .....</b>  | <b>8</b>  |
| <b>1. Úvod .....</b>   | <b>9</b>  |
| 1.1 Princip adaptivní optiky .....                                 | 9         |
| 1.2 Přehled piezoelektrických materiálů .....                      | 10        |
| 1.3 Piezoelektrické aktuátory .....                                | 11        |
| 1.4 Aplikace piezoelektrických materiálů pro adaptivní optiku..... | 11        |
| 1.5 Cíl bakalářské práce. ....                                     | 14        |
| <b>2. Popis modelu .....</b>                                       | <b>15</b> |
| 2.1 Geometrie kompozitní struktury .....                           | 15        |
| 2.2 Elektromechanické vlastnosti modelu.....                       | 16        |
| 2.3 Optické vlastnosti modelu .....                                | 22        |
| <b>3. Realizace modelu v programovacím prostředí.....</b>          | <b>26</b> |
| 3.1 FEM simulace kompozitní struktury.....                         | 26        |
| 3.2 Návrh optimalizaci rozměrů modelu.....                         | 31        |
| 3.3 Návrh algoritmu pro korekce vlnoplochy (COMSOL & MATLAB).....  | 34        |
| <b>Závěr .....</b>   | <b>40</b> |
| <b>Literatura .....</b>  | <b>41</b> |

## Seznam ilustrací

|  |    |
|--|----|
| Obrázek 1.1 – Princip adaptivní optiky .....   | 9  |
| Obrázek 1.2 – Přímý a převrácený piezoelektrický jev .....   | 10 |
| Obrázek 1.3 – Deformace vlnoplochy procházející aberátorem .....                                       | 12 |
| Obrázek 1.4 – Deformace vlnoplochy procházející aberátorem (s použitím deformovatelného zrcadla) ..... | 12 |
| Obrázek 1.5 – Princip korekce vlnoplochy s použitím deformovatelného zrcadla .....                     | 13 |
| Obrázek 2.1 – Průřez bimorfního deformovatelného zrcadla .....   | 15 |
| Obrázek 2.2 – Tenzory mechanického napětí .....  | 16 |
| Obrázek 2.3 – Dielektrické posunutí bez krystalu .....   | 19 |
| Obrázek 2.4 – Dielektrická indukce s krystalem .....   | 19 |
| Obrázek 2.5 – Význam některých Zernikeových polynomů jako vlnových vad .....                           | 23 |
| Obrázek 3.1 – Geometrie modelu v programu COMSOL .....   | 26 |
| Obrázek 3.2 – Výběr materiálu PZT z knihovny programu COMSOL .....                                     | 27 |
| Obrázek 3.3 – Okrajové podmínky kompozitní struktury .....   | 28 |
| Obrázek 3.4 – Funkce <i>Volts</i> v programu COMSOL .....  | 28 |
| Obrázek 3.5 – Rozdělení zrcadla na devět pracovních segmentů .....                                     | 29 |
| Obrázek 3.6 – Diskrétní struktura modelu .....   | 30 |
| Obrázek 3.7 – Tvar deformovatelného zrcadla ve 3D .....  | 30 |
| Obrázek 3.8 – Deformace zrcadla v rovině XY .....  | 31 |
| Obrázek 3.9 – Deformace zrcadla v rovině YZ .....  | 31 |
| Obrázek 3.10 – Matematický model deformovatelného zrcadla (pohled ze zdola) .....                      | 32 |
| Obrázek 3.11 – Maximální ohnutí modelu ve 3D(a), v rovině ZY (b) .....                                 | 33 |
| Obrázek 3.12 – Závislost mechanického posunutí na tloušťce PZT a Si .....                              | 33 |
| Obrázek 3.13 – Závislost výšky PZT na tloušťce Si při maximální deformaci .....                        | 34 |
| Obrázek 3.14 – Matematický model deformovatelného zrcadla s $n \times n$ segmentací .....              | 35 |
| Obrázek 3.15 – Funkce $f_{distr}$ a <i>brak</i> .....  | 36 |
| Obrázek 3.16 – Výsledné koeficienty napětí .....   | 39 |

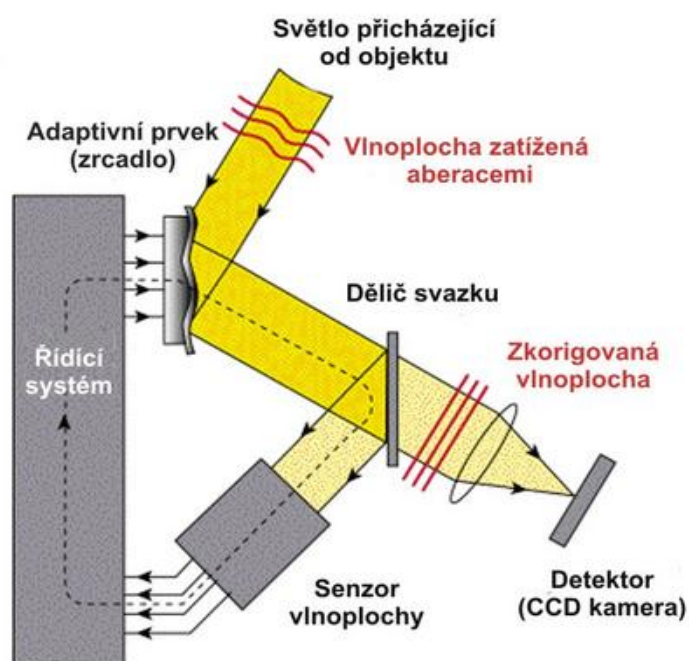
## Seznam symbolů

|                 |                  |  |
|-----------------|------------------|--|
| $C_{ijkl}$      | $\text{mN}^{-1}$ | anizotropní elastická tuhost látky (elastické koeficienty)           |
| $D_i$           | $\text{Cm}^{-2}$ | elektrická indukce   |
| $D$             |                  | ohybová tuhost   |
| $d_{ijk}$       | $\text{CN}^{-1}$ | deformační koeficient  |
| $E_j$           | $\text{Vm}^{-1}$ | intenzita elektrického pole  |
| $E$             | $\text{Pa}$      | modul pružnosti v tahu (Youngův modul)                               |
| $e_{kl}$        |                  | složky tenzoru malých deformací                                      |
| $e_I$           |                  | stopa tenzoru malých deformací                                       |
| $h$             | $\text{mm}$      | tloušťka substrátu   |
| $k_0$           |                  | vlnový vektor  |
| $P_{ij}$        | $\text{Cm}^{-2}$ | polarizace v anizotropním prostředí                                  |
| $S_{ij}$        |                  | tenzor pružné deformace  |
| $u$             |                  | vektor posunutí  |
| $\delta_{ij}$   |                  | Kroneckerovo delta   |
| $\varepsilon_0$ | $\text{Fm}^{-1}$ | elektrická permitivita vakua ( $8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ) |
| $\varepsilon_r$ | $\text{Fm}^{-1}$ | relativní permitivita  |
| $\nu$           |                  | Poissonova konstanta   |
| $\sigma_{ij}$   | $\text{Nm}^{-1}$ | tenzor normálního napětí   |
| $\tau$          | $\text{Nm}^{-1}$ | tenzor tečného nebo tangenciálního napětí                            |
| $\chi_{ij}$     |                  | dielektrická susceptibilita (vnímavost)                              |
| $\gamma$        | $\text{Pa}^{-1}$ | tenzor malých deformací  |

# 1. Úvod

## 1.1 Princip adaptivní optiky

Adaptivní optika je oblast optiky, ve které se využívá adaptivní korekce tvaru vlnoplochy na základě jejího měření v reálném čase. Návrh tohoto principu vznikl v padesátých letech dvacátého století, nicméně byl realizován až v osmdesátých letech dvacátého století v oblasti astronomie, kdy jsou u velkých astronomických teleskopů korigovány aberace způsobené průchodem světla atmosférou a tím je významně zlepšena kvalita obrazu (Obrázek 1.1).



Obrázek 1.1 Princip adaptivní optiky (převzato z [13]).

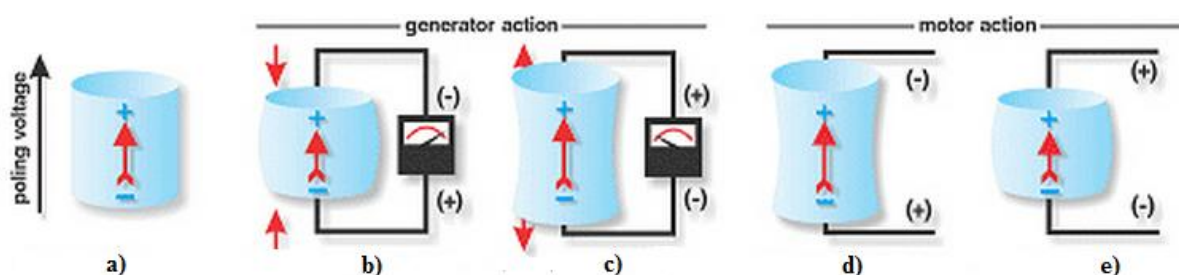
Názorným příkladem systému adaptivní optiky, který se vyvinul v přírodě, je zaostřovací systém oko – mozek. Oko je schopno k adaptacím na různé podmínky prostředí, zlepšit jeho kvalitu zobrazování. Mozek interpretuje obraz, určuje opravu, a to buď volně, nebo nevolně, a platí to, že korekce se provádí pomocí biomechanického pohybu částí oka [4].

V současné době nastává rapidní rozvoj této problematiky a aplikace adaptivní optiky se stále rozšiřují do přístrojové techniky i spotřební elektroniky (diagnostické přístroje v oftalmologii a optometrii, systémy optické metrologie, adaptivní korekce laserových svazků, DVD přehrávače, atd.).



## 1.2 Přehled piezoelektrických materiálů

Piezoelektrický jev byl objeven v roce 1880 bratry Pierrem a Jacquesem Curieovými na krystalech turmalínu, vzápětí křemene. Při mechanickém namáhání krystalů, jejichž krystalová mříž nemá střed symetrie, objevitelé pozorovali vznik elektrických nábojů na povrchu krystalu. Elektrický náboj je tomuto tlaku přímo úměrný. Jevo byl nazván *přímý piezoelektrický jev*. Existuje opačný jev přímému – *obracený piezoelektrický jev*, který spočívá v mechanické deformaci způsobené přiloženým elektrickým polem (Obrázek 1.2).



Obrázek 1.2 Přímý a převrácený piezoelektrický jev: a) zpolarizovaný vzorek z piezoelektrické látky, b), c) reakce vzorku – vznik elektrického náboje na přiložené mechanické napětí, d), e) reakce vzorku – vznik mechanické deformace na přiložené elektrické napětí (převzato z [15]).

Vzniklý elektrický náboj je přímo úměrný působící síle a konstanta úměrnosti je tzv. *piezoelektrická konstanta*. Napětí se odebírá z elektrod vyvedených přímo z krystalu.

Přímý piezoelektrický jev se dnes používá ve snímačích mechanických veličin (tlaku, síly nebo zrychlení).

V průmyslu široké použití mají takové piezoelektrické látky jako křemen, titaničitan barnatý, niobát lithia ( $\text{LiNbO}_3$ ), PMN – PT.

V technice piezoelektrické vlastnosti se využívají takové materiály jako keramické materiály na bázi tuhých roztoků oxidů olova (Pb), zirkonu (Zr) a titanu (Ti) tzv. PZT keramika, typu feroelektrik, se strukturou uspořádanou elektrickým polem.

Jevem podobným jevu piezoelektrickému je *elektrostriktce*, kdy se působením elektrického napětí krystal určitých látek mechanicky deformuje. (Tato závislost je kvadratická, na rozdíl od lineární závislosti při jevu piezoelektrickém).

### 1.3 Piezoelektrické aktuátory

*Piezoelektrický aktuátor* je elektromechanický prvek, který pracuje na principu obráceného piezoelektrického jevu. Převod mezi elektrickou a mechanickou energií je realizován pouze prostřednictvím piezoelektrického jevu v materiálu aktuátoru, takže celkové uspořádání je velmi prosté.

Piezoelektrický aktuátor fyzicky představuje elektrický kondenzátor, určený s konkrétními hodnotami kapacity  $C$  a ztrátového činitele  $\tan\delta$  (případně ztrátového odporu  $R_P$ ). Prodloužení aktuátoru po přiložení elektrického pole postupně roste s rychlostí úměrnou nabíjení kondenzátoru. Při nabíjení se kondenzátor deformuje a vyvolaná deformace je přímo úměrná náboji, kondenzátor odebírá malý nabíjecí proud. Při stálé deformaci (tedy při konstantním přiloženém napětí) má aktuátor minimální proudový odběr, který nepřímo úměrný ztrátovému odporu. Pro dosažení původní délky je nutné aktuátor opět vybit.

Při výrobě aktuátorů, se používají vzorky s *unimorfni*, *bimorfni* a *polymorfni* strukturou. Unimorfy se nejčastěji používají na bzučáky, sirény atd. Bývají to tenké kovové destičky s nalepenou deskou PZT keramiky uspořádané v kruhové konfiguraci.

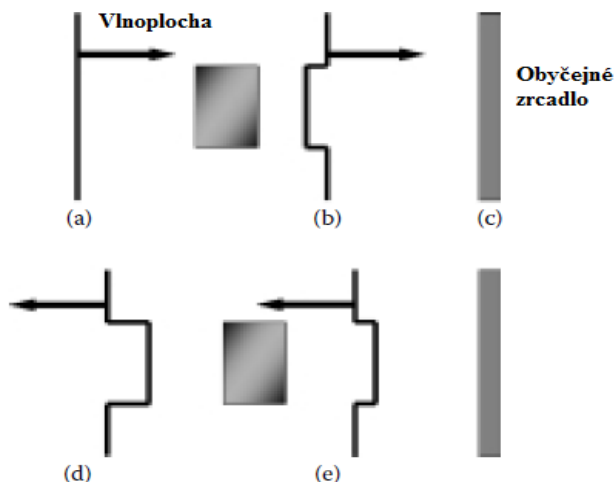
Bimorfy se používají jako aktuátory (převodníky elektrického signálu na mechanické posunutí) v pletacích strojích při zvedání jehel, zařízeních pro převod slepeckého Braillova písma do počítače atd.

Polymorfy s více než dvěma vrstvami PZT keramiky zvyšují účinnost převodu elektrické a mechanické formy energie a zmenšují nutné elektrické napětí při stejné velikosti celkového posunutí.

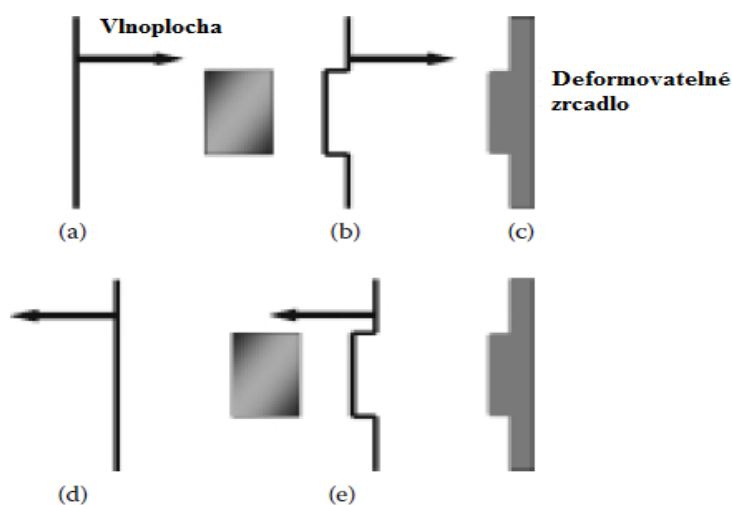
### 1.4 Aplikace piezoelektrických materiálů pro adaptivní optiku

Hlavním účelem adaptivní optiky je korekce vlnoplochy, která průchodem přes atmosféru mění svůj původní tvar. Tvar vlnoplochy lze opravit pomocí změny optické fáze profilu. Základním principem, který se používá, v korekci vlnoplochy je *fázová konjugace*. Způsob použití fázové konjugace je uveden na obrázcích 1.3 a 1.4. Vlnoplocha nosníku vstupujícího zleva (Obr. 1.3a) je zkreslena sklem (protože index lomu skla je vyšší než jedna). Vlnoplocha se zpožďuje v těch místech prostoru, kde prochází sklem (Obr. 1.3b). Po odrazu od zrcadla (Obr. 1.3b), vlnoplocha má stejný tvar, ale šíří se v opačném směru. Při opakovaném průchodu odražené vlnoplochy sklem se celkové zpoždění v místech průchodu sklem zdvojnásobí. Výsledkem je

značně zkreslená vlnoplocha (Obr. 1.3e), jejíž zkreslení je způsobeno dvojitým průchodem skrz aberaci.



Obrázek 1.3 Deformace vlnoplochy procházející aberátorem: (a) vlnoplocha projde aberátorem, (b) se zpožděním se odrazí do (c) zrcadla a (d) šíří se do leva se zpožděním. (e) Pokud vlnoplocha projde podruhé přes aberátor zpozdí se ještě víc (převzato z [8]).

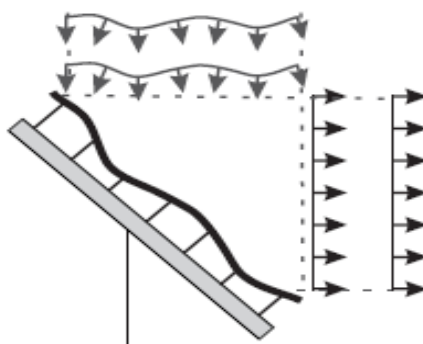


Obrázek 1.4 Deformace vlnoplochy procházející aberátorem (s použitím deformovatelného zrcadla): (a) vlnoplocha projde aberátorem, (b) se zpožděním se odrazí do (c) deformovatelného zrcadla s konjugovaným tvarem a (d) šíří se do leva se zpožděním. (e) Po přechodu podruhé přes aberátor, vlnoplocha se transformuje do původního tvaru (převzato z [8]).

Pro dosažení rovinné vlnoplochy po dvojitým průchodu sklem, musíme změnit povrch zrcadla tak, aby po odrazu od něj nevznikala zbytková zkreslení (Obr. 1.4).

Výsledkem korekce s konjugovanou fází profilu je ideální rovinná vlnoplocha. Nicméně pokud vlnoplochu není možné přesně určit nebo když difrakční efekty dominují, fázovou konjugace nelze použít.

*Deformovatelná zrcadla* představují primární technologii pro korekci vlnoplochy (Obrázek 1.3). Typy deformovatelných zrcadel představeny v sérii různých modifikací: membránových, bimorfních a kontinuální zrcadla s různými geometriemi aktuatorů a okrajovými podmínkami.



Obrázek 1.5 Princip korekce vlnoplochy s použitím deformovatelného zrcadla (převzato z [8]).

Korektory vlnoploch jsou tradičně rozděleny do dvou tříd podle realizovatelných kompenzačních technik – zonální a modální. Zonální korektory jsou to segmentová nakloněná zrcadla, která umožňují individuální nastavení pro fáze přes sadu subaperturních (regulujících množství světla) kroků fázové kompenzace. V modálních korektorech, jako u deformovatelných zrcadel, používá se sada plynulých funkcí pro aproximace požadované korekce fáze.

Jedním z typů deformovatelných zrcadel, které se používají v adaptivní optice, je piezoelektrické deformovatelné zrcadlo (PDM – piezoelectric deformable mirror). Piezoelektrická zrcadla mají aktuatory, které mohou posouvat reflexní desku. Když tlačíme na desku – destička se deformuje společně se sousedními aktuatory. Zdvih na aktuátoru je tedy definován nejen působící silou, ale také poměrem tuhosti piezoelektrického materiálu aktuátoru vzhledem k tuhosti reflexní desky.

Pro zhodnocení elektromechanické odezvy PDM je výhodné určit dva parametry:

- maximální průhyb deformovatelného zrcadla

- maximální rozdíl mezi průhyby sousedních segmentů na deformovatelném zrcadle

V PDM jsou deformovatelné desky připevněny pouze k aktuátorům a mají volné kraje. Když se všechny aktuátory pohybují společně, deska se posune, aniž dojde k deformaci. Rozsah zdvihu je roven maximálnímu zdvihu volného aktuátoru.

Piezoelektrické zrcadlo má obvykle 7 až 15% hysterezi. Tato vlastnost omezuje jejich použitelnost pro dopředné řízení. Vzhledem k tomu že amplituda místní reakce piezoelektrického zrcadla závisí pouze na tuhosti desky a akčních členů, tato zrcadla mohou být zmenšena na velké množství řídicích kanálů. Piezoelektrická zrcátka jsou vhodná pro rychlou zpětnou vazbu na základě korekce nízkých a vyšších řádu aberace s velkou amplitudou.

## 1.5 Cíl bakalářské práce

Cílem této bakalářské práce je se seznámit se základními elektromechanickými vlastnostmi piezoelektrických materiálů. Nastudovat formulaci úlohy pro řešení deformace a elektrostatického potenciálu ve vrstvené kompozitní struktuře s piezoelektrickým materiálem. Seznámit se s principy adaptivní optiky.

V programovacím prostředí COMSOL pomocí metody konečných prvků (MKP) provést simulaci deformace povrchu kompozitní struktury vhodně zvoleným systémem elektrod.

Pomocí prostředí MATLAB navrhnout jednoduchý algoritmus, který určí optimální hodnoty napětí na elektrodách deformovatelného zrcadla tak, aby se dospělo požadované korekce vlnoplochy.

Provést analýzu vlivu geometrických rozměrů zrcadla na kritické parametry deformace jeho povrchu a navrhnout jejich optimalizaci.

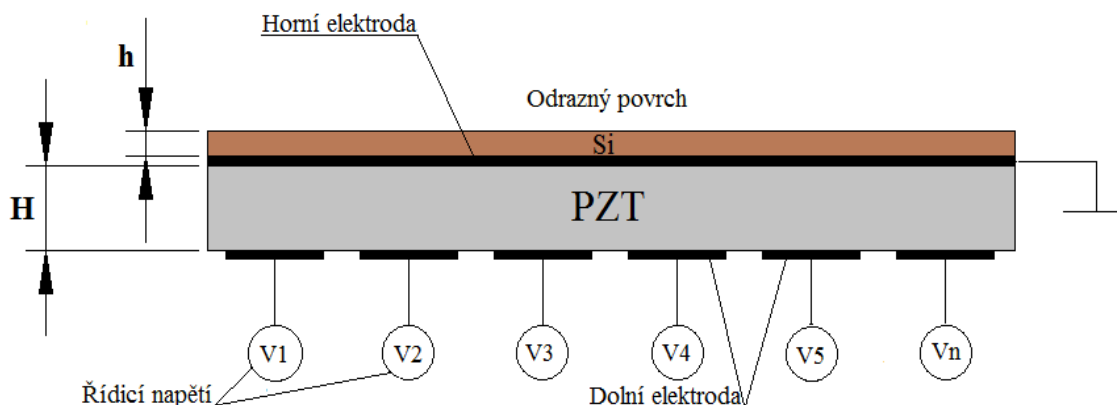
## 2. Popis modelu

V této části bude popsáno, z čeho se skládá deformovatelné zrcadlo (její geometrie a materiálové vlastnosti). V kapitole „Elektromechanické vlastnosti modelu“ definovány a vysvětleny základní pojmy fyzikálního modelu deformovatelného zrcadla, které vycházejí z lineární teorie pružnosti a teorie elektrického pole v lineárním dielektriku. Takto definovaný fyzikální model nám umožní pochopit základní princip piezoelektrického efektu a na jeho základě bude provedena formulace numerického modelu deformovatelného zrcadla pomocí metody konečných prvků v programu COMSOL.

Ve třetí kapitole model zrcadla bude popsán z hlediska vlnové optiky.

### 2.1 Geometrie kompozitní struktury

Bimorfnní struktura deformovatelného zrcadla přepokládá použití následujících materiálů: piezoelektrické keramiky (PZT) a křemíku. Křemík je spojen s vrchní částí keramiky. Spojení materiálu se provádí lepidlem. K rozhraní mezi křemíkem a keramikou jsou připojeny elektrody. Přední strana PZT je leštěná a potažená křemíkem, aby bylo možné vytvořit deformovatelný povrch (Obrázek 2.1).



Obrázek 2.1 Průřez bimorfnního deformovatelného zrcadla.

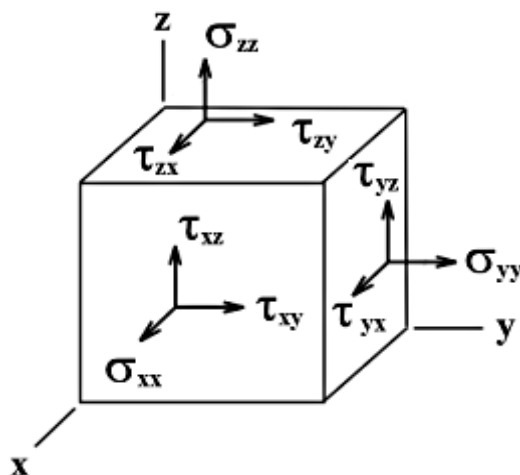
Výška  $h$  je tenká vrstva křemíku,  $H$  – piezoelektrické keramiky. Shora, model se představuje kruh o poloměru 25 milimetrů.

## 2.2 Elektromechanické vlastnosti modelu

Pro popis elektromechanických vlastností bimorfnní struktury deformovatelného zrcadla je potřeba definovat mechanickou a elektrickou část fyzikálního modelu zvlášť.

Existuje dva typy vnějších sil, které mohou působit na těleso. Takové síly, které působí na povrch tělesa jako tlak nebo hydraulický tlak se nazývají *povrchové síly*. Síly, rozložené po hmotnosti těla takové jako tíhová síla, magnetické síly (v případě pohybu tělesa), inerciální síly (setrvačnost) se nazývají *hmotné síly* (objemové). Při analýze a popisu vlastností modelu zavedeme povrchové síly, proto je nutné se seznámit s pojmy *mechanické napětí* a *deformace*.

Mechanické napětí je míra vnitřního rozložení sil na jednotku plochy tělesa, způsobených vnějším sílovým zatížením. Jako fyzikální veličina napětí je tenzor druhého řádu. V trojrozměrném prostoru má 9 složek, podle toho jakým směrem síla působí vůči sledovanému elementu plochy. Jak je vidět na obrázku 2.2, na každou plošku vybraného elementu, může působit síla ve 3 nezávislých směrech: kolmo ( $\sigma$  – normálnímu napětí), a podélně ( $\tau$  – tečné napětí nebo tangenciální).



Obrázek 2.2 Tenzory mechanického napětí.

Zápis tenzorů druhého řádu v trojrozměrném prostoru je možné provést pomocí následujících matic:

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Tenzor  $\tau$  je symetrický tenzor druhého řádu ( $\tau_{ij} = \tau_{ji}, i \neq j$ ), proto pro jeho jednoznačné určení stačí definovat pouze 6 jeho nezávislých složek:  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$  [7].

Pojmem deformace rozumíme změnu tvaru tělesa v důsledku působení síly. V trojrozměrném prostoru se deformace tělesa popíše pomocí tří složek vektoru posunutí  $u_i$ , které jsou obecně závislé na poloze  $x_i$  ( $i = 1,2,3$ ) [12]. Variace posunutí  $u$  s polohou  $x$  v tělese se používá pro definování komponent tenzorů druhého řádu:

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} (i, j = 1,2,3) \quad (2)$$

kde  $e$  je relativní prodlužování. Další důležitá komponenta deformací je *tenzor malých deformací*  $\gamma$ , který je definován následujícím vztahem:

$$\gamma_{ij} = e_{ij} + e_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (3)$$

Tenzor pružné deformace  $[S_{ij}]$  odpovídá následujícímu zápisu:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} e_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & e_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Podobně jak u napětí, pro jednoznačné určení celkové deformace tělesa stačí určit pouze 6 nezávislých složek:  $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ .

Lineární vztahy mezi složkami tenzorů napětí a deformace vyjadřuje Hookeův zákon. Pro normálové složky tenzorů napětí a deformace platí vzorec:

$$e_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{E} \quad (5)$$



kde  $e$  je relativní délkové prodloužení ve směru osy  $x_i$ , proměnná  $\sigma_{ii}$  odpovídá mechanickému napětí a  $E$  je modul pružnosti (Youngův modul). Hookeův zákon pro smyk lze vyjádřit dalším vzorcem:

$$\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} \quad (6)$$

Pomocí Einsteinova sumačního pravidla, rovnice (5) a (6) lze zobecnit na lineární vztah mezi tenzorem napětí a tenzorem deformací:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (7)$$

kde  $\sigma_{ij}$  jsou složky tenzoru napětí,  $e_{kl}$  jsou složky tenzoru malých deformace a koeficienty  $C_{ijkl}$  popisují anizotropní elastickou tuhost látky (elastické koeficienty). Elastické koeficienty uspořádané do tenzoru čtvrtého řádu popisují elastické chování látek. Nejobecněji (u trojklonných krystalů) má tento tenzor 21 nezávislých složek, u izotropních těles se tento počet redukuje na dva. Pro popis izotropních těles se volí buď Laméovy koeficienty  $\mu, \lambda$  nebo moduly pružnosti v tahu a smyku  $E$  a  $G$ . Potom můžeme napsat Hookeův zákon ve tvaru (první člen popisuje objemovou deformaci a druhý tvarovou):

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_I + 2\mu e_{ij} \quad (8)$$

kde  $e_I$  je stopa tenzoru malých deformací a  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta. Uvedený vztah představuje obecný tvar Hookeova zákona v izotropním prostředí.

Pomocí těchto vztahů je možné popsat elastické chování materiálu a určit v něm vyvolané deformaci z hlediska teorie pružnosti látek.

V dalších odstavcích popíšeme základní pojmy teorie elektrického pole.

Jedním z vlastností anizotropního krystalu je vznik *polarizace* vyvolané elektrickým polem. Při polarizaci se z molekul dielektrika (nepolární dielektrikum) působením elektrického pole stanou elektrické dipóly – dojde

k nesymetrickému rozložení částic s elektrickým nábojem uvnitř molekul. Elektrický moment (polarizace) v anizotropním prostředí popisuje stavová veličina nazývaná polarizace a definovaná následující rovnicí (9).

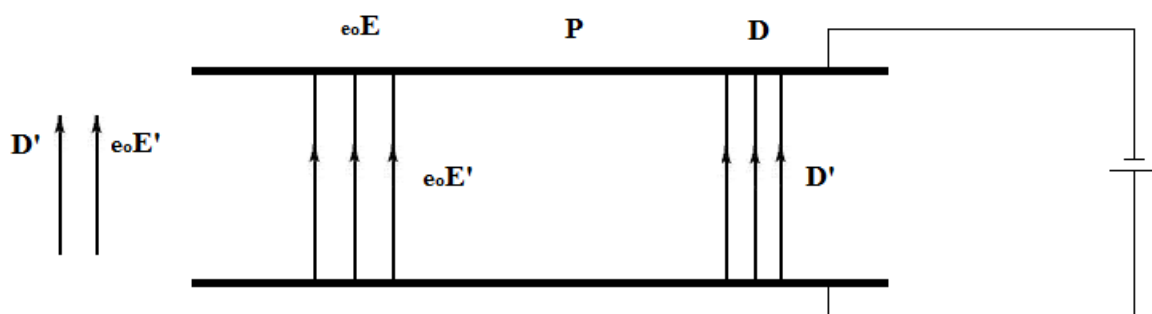
$$P_{ij} = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j \quad (9)$$

kde  $\varepsilon_0$  je elektrická permitivita vakua ( $8,854 \times 10^{-12}$  F/m),  $\chi_{ij}$  je *dielektrická susceptibilita* (vnímavost) a  $E_j$  je *intenzita elektrického pole*.

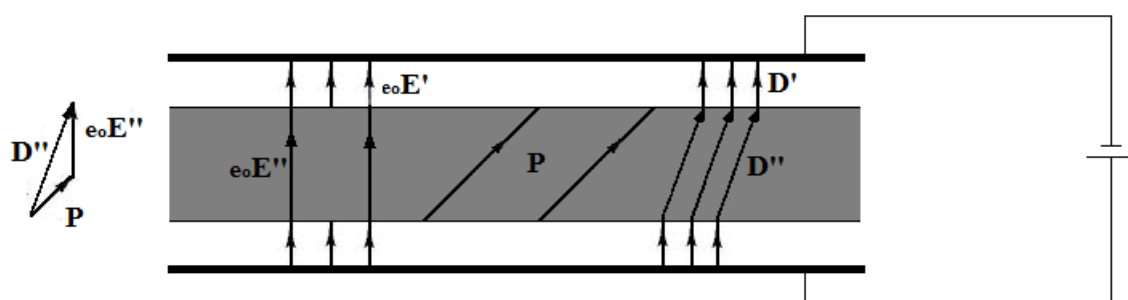
Účinky elektrického pole v dielektriku charakterizovaný stavovou veličinou nazývanou *elektrická indukce D*. Vektor dielektrického posunutí  $D = \varepsilon_0 E + P$  lze vyjádřit pomocí vztahu:

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{rij} E_j \quad (10)$$

kde  $\varepsilon_r = \chi + 1$ ;  $\varepsilon_r$  je relativní permitivita. Na obrázcích 2.3 a 2.4 zobrazeny vektory dielektrického posunutí jako součet vektorů polarizace a elektrické intenzity.



Obrázek 2.3 Dielektrické posunutí bez krystalu.



Obrázek 2.4 Dielektrická indukce s krystalem.

Na prvním z obrázků je vidět že vektor dielektrického posunutí roven vektoru elektrické intenzity. Další obrázek znázorňuje, jak se změní orientace vektoru  $D''$ , kde  $E''$  je elektrická intenzita uvnitř krystalu. Přičemž směr vektoru  $D'$  je stejný se směrem elektrické intenzity  $E'$  mimo krystalu.

Poslední odstavec uvede, jaké existují vztahy mezi elastickými a elektrickými stavovými veličinami v piezoelektrických materiálech.

Na začátku, se seznámíme s pojmem *piezoelektrický jev* (efekt). Piezoelektrický efekt je schopnost krystalu generovat elektrické napětí při jeho deformování (11). Působení elektrického pole na materiál vyvolá v tomto materiálu deformace (obrácený piezoelektrický jev) a vyjadřuje se pomocí (12):

$$D_i = d_{ijk} T_{jk} \quad (11)$$

$$S_{jk} = d'_{ijk} E_i \quad (12)$$

kde  $D_i$  elektrické posunutí ( $\text{Cm}^{-2}$ ),  $E_i$  – intenzita elektrického pole ( $\text{Vm}^{-1}$ ),  $S_{jk}$  – tenzor malé deformace,  $T_{jk}$  – mechanické napětí ( $\text{Nm}^{-1}$ ), a  $d_{ijk}$  – komponenta piezoelektrického náboje nebo deformační koeficient ( $\text{CN}^{-1}$  a  $\text{mV}^{-1}$ ). Obvykle  $d$  se nazývá piezoelektrický koeficient. Termodynamický rozbor ukazuje že  $d_{ijk} = d'_{ijk}$ , jinými slovy koeficienty které spojují pole a deformace jsou stejné s tím, které spojují mechanické napětí a polarizace.

Vzorce (1) a (2) můžou být zahrnuty do tzv. stavových rovnic lineárního piezoelektrika [2], které se představují ve formě deformace – náboj:

$$S_{ik} = s_{iklm}^E T_{lm} + d_{nik} E_n \quad (13)$$

$$D_i = d_{ilm} T_{lm} + \varepsilon_{in}^T E_n \quad (14)$$

kde  $d_{ilm}$  je matice pro přímý piezoelektrický efekt,  $d_{nik}$  je matice pro obrácený piezoelektrický jev. Index  $E$  označuje konstantu  $s_{iklm}^E$  naměřenou při konstantním (nulovém) elektrickém poli. Podobně index  $T$  označuje konstantu  $\varepsilon_{in}^T$  naměřenou při

konstantním nebo nulovým mechanickým napětím. Rovnice (13) a (14) lze zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{21}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{31}^E & s_{32}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E = 2(s_{11}^E - s_{12}^E) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{24} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Z maticového popisu je dobře vidět že vektory D a E jsou vektory Kartézského tenzoru prvního řádu, permitivita  $\varepsilon$  je tenzor druhého řádu. Mechanické napětí T a deformace S jsou také tenzory druhého řádu. Napětí a deformace jsou symetrické tenzory, proto indexace těchto veličin může být zapsaná v následující formě:  $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$ . Proto S a T mají vektorovou podobu z 6 elementů. V důsledku toho s má rozměr  $6 \times 6$  místo tenzoru 4 řádu. Obecně takový zápis se nazývá zápisem pomocí Voigtovy indexace.

V dielektrickém materiálu takové mechanické stavové veličiny jako deformace (tenzor malé deformace  $S_{ik}$ ) a mechanické napětí (tenzor napětí  $T_{lm}$ ) jsou vzájemně vztaheny pomocí elastické tuhosti nebo elastické poddajností  $s_{iklm}$ . Obdobně je tomu v případě elektrických stavových veličin elektrické vlastnosti jako dielektrické posunutí (vektor  $D_i$ ) a elektrická intenzita (vektor  $E_k$ ) jsou vzájemně propojené pomocí dielektrické konstanty nebo permitivity  $\varepsilon_{in}$ . Pokud materiál je piezoelektrický, se mechanické

a elektrické stavové veličiny navzájem ovlivňují a jejich vzájemný lineární vztah je vyjádřen pomocí tenzoru třetího řádu piezoelektrických koeficientů.

Princip deformovatelného zrcadla využívá převrácený piezoelektrický efekt.

## 2.3 Optické vlastnosti modelu

Pro popis optických vlastností deformovatelného zrcadla je potřeba vysvětlit pojem fázového rozložení paprsku (adaptivní optika se chová jako regulátor fázového rozložení optického paprsku) z pohledu vlnové optiky.

Předpokládejme, že v pravotočivé kartézské soustavě souřadnic kolem osy  $Z$ , se bude šířit monochromatická (zdroj kmitá na jedné frekvenci) vlna. Pomocí komplexní amplitudy popíšeme její časově nezávislou část:

$$U(x; y; z) = A(x; y; z) \exp[ik_0(z + S(x; y))] \quad (17)$$

kde  $A(x; y; z)$  je amplituda vlny,  $k_0$  vlnový vektor vlny ve vakuu a  $k_0 z + k_0 S(x; y)$  je fáze vlny. Pokud zafixujeme souřadnici  $z_0$  a budeme tak vyšetřovat fáze v rovině kolmé na osu  $z$ , pak člen  $k_0 z_0$  popisuje konstantní složku fáze odpovídající rovinné vlně postupující podél osy  $z$  v místě o souřadnici  $z_0$ , a odchylku od tohoto rovnoměrného rozložení vyjadřuje člen  $k_0 S(x; y)$ . Tato funkce  $S(x; y)$  vyjadřuje nechtěné fázové poruchy od ideálního rozložení fáze, tedy vlnové vady.

Funkci  $S(x; y)$  lze reprezentovat v bázi Zernikeových polynomů, které jsou výhodné pro popis optických systémů. Ty jsou definovány za pomoci polárních souřadnic  $(\rho, \theta)$  a přirozených čísel  $(n, m)$ , kde  $n \geq m \geq 0$ . A to jako v:

$$\begin{aligned} Z(n, -m) &= R_n^m(\rho) \cos(m\theta) \\ Z(n, m) &= R_n^m(\rho) \sin(m\theta) \end{aligned} \quad (18)$$

kde radiální část  $R_n^m$ .

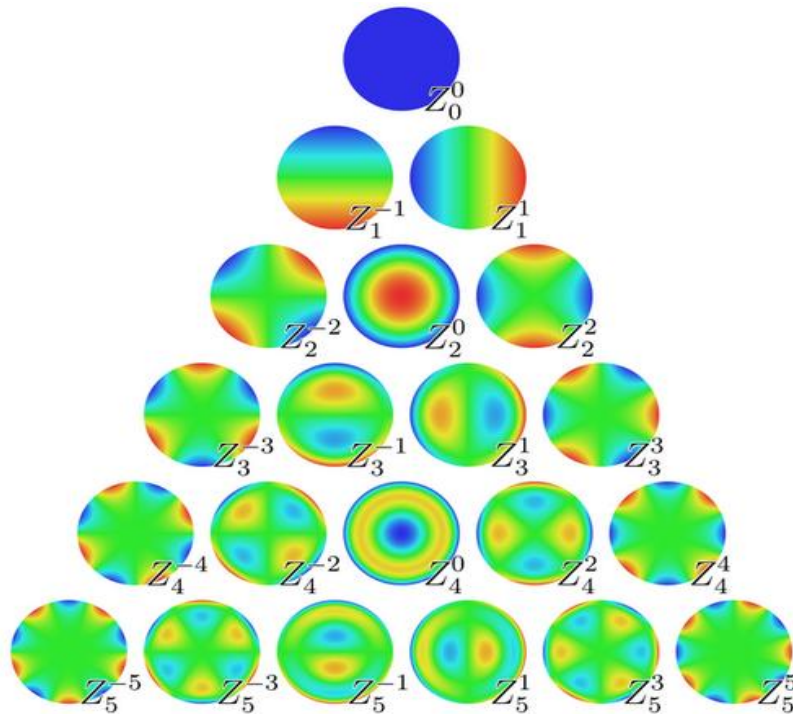
$$R_n^{\pm m}(\rho) = \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! (\frac{n+m}{2} - s)! (\frac{n+m}{2} - s)!} \rho^{n-2s} \quad (19)$$

Pokud zavedeme souhrnný index  $k$  pro každou přípustnou dvojici indexů  $(n; m)$ , pak funkci  $S(x; y)$  rozložíme jako:

$$S(x, y) = \sum_{k=0}^K a_k Z_k(\rho, \theta) + \delta\phi(\rho, \theta) \quad (20)$$

kde  $K$  je počet polynomů, které jsme pro rozklad použili a  $\delta\phi(\rho, \theta)$  je chyba, které se dopouštíme uvažováním pouze konečného počtu polynomů.

Reprezentace v této bázi má výhodu v propojení s teorií vlnových aberací. Nejnižší polynomy lze totiž ztotožnit se známými aberacemi. Na obrázku 2.5 jsou uvedeny známé vlnové aberace a jejich ekvivalenty mezi Zernikeovými polynomy.



Obrázek 2.5 Význam některých Zernikeových polynomů jako vlnových vad (převzato z [14]).

Právě tato vlastnost činí Zernikeovy polynomy vhodné pro popis systému adaptivní optiky, protože jejím úkolem je většinou právě tyto základní vlnové aberace odstraňovat. Parametrem, jenž se v této souvislosti objevuje při nastavování reálné sestavy, je počet polynomů, které jsou využity pro vyjádření  $S(x; y)$ .

Podle vlnové teorie zobrazení zhoršují výrazně tyto poruchy intenzitní detekci. Hodnocení kvality zobrazení například podle rozptylové funkce bodu, budou nám vlnové vady měnit velikost a tvar této funkce. Při nulové funkci  $S(x; y)$  v dané výstupní

rovině budeme již při detekci omezení jen difrakcí na konečných rozměrech daného systému, a dosáhneme ideálního stavu.

Při dynamické změně optických parametrů prostředí, budou v čase proměnné i fázové poruchy, proto potřeba psát  $S(x; y; t)$ , kde  $t$  značí čas. Pro dosažení ideální, pouze difrakcí omezené detekce, musíme tedy být schopni v reálném čase tyto poruchy eliminovat, a tedy  $S(x; y; t) = 0$ . Toto rozložení lze dosáhnout pomocí principu *fázové konjugace*. Pro taková signál bude platit:

$$S(x; y; t) = -S(x; y; t) \quad (21)$$

Sjednocením původního svazku s jeho fázově konjugovanou formou pak dosáhneme uniformního rozdělení fáze výsledného svazku, což značí eliminace vlnových aberací.

Deformovatelné zrcadlo slouží jako regulátor fázového rozložení. Princip adaptivního prvku, jako bimorfnní struktury, spočívá ve spojení dvou materiálů (PZT a Si), tvar kterých lze ovlivňovat působením elektrického pole v piezoelektrické vrstvě. Tvar zrcadla se popisuje pomocí biharmonické rovnice:

$$\Delta\Delta S = \frac{P}{D} \quad (22)$$

kde funkce  $S$  je funkce fázové chyby (její  $Z$ -složka),  $P$  odpovídá zatížením (splňujícím podmínky statické rovnováhy) aktuátory působícím na povrch zrcadla.  $D$  je ohybová tuhost (23).

$$D = \frac{Eh^3}{12 \cdot (1 - \nu)} \quad (23)$$

Tady  $E$  je Youngův modul,  $h$  odpovídá tloušťce substrátu a  $\nu$  - Poissonova konstanta.

Podle [8], deformovatelná zrcadla s kruhovou aperturou mají mít nejméně dva aktuátorové kroužky rozmístěné mimo pracovní plochu. Toto se realizuje pro

definování okrajových podmínek pro konturu pracovní plochy  $S|_B$  a  $\frac{\partial S}{\partial r}|_B$ , kde  $r$  jsou radiální souřadnice, a  $B$  je hranice pracovní plochy.



### 3. Realizace modelu v programovacím prostředí

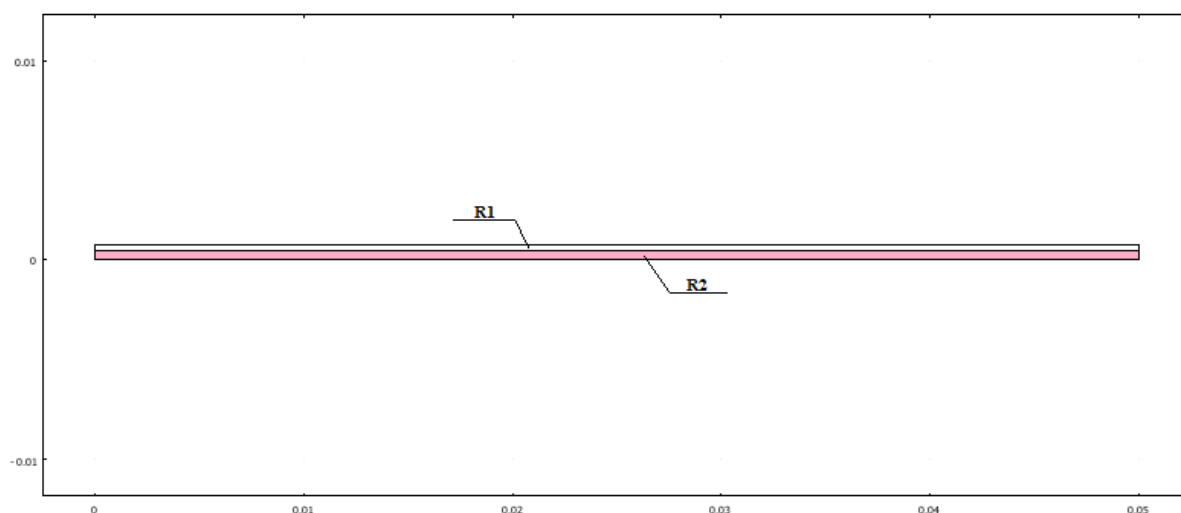
V této části bude představen popis realizace numerického modelu deformovatelného zrcadla v programu COMSOL. V první kapitole pomocí různých nastavení programu COMSOL, vytvoříme model deformovatelného zrcadla. Prvním krokem realizaci bude tvorba geometrie adaptivního zrcadla. Následujícím bodem je specifikování materiálových konstant v jednotlivých částech modelu (elastických poddajností, permitivity prostředí, piezoelektrických konstant) a stanovení okrajových podmínek. V dalším kroku se provede diskretizace modelu pomocí metody konečných prvků. Na konci bude vytvořen numerický model zrcadla, ve kterém budeme moci po zadání hodnot napětí na jednotlivých elektrodách piezoelektrické vrstvy určit deformaci povrchu křemíkové vrstvy.

V druhé kapitole bude popsán způsob optimalizaci deformovatelného zrcadla, podle kterého bude dosaženo největší ohnutí zrcadla při určitém poměru tloušťky PZT keramiky k tloušťce křemíku.

Závěrná část kapitoly bude věnovaná návrhu algoritmu pro korekci vlnoplochy, kde vygenerovaná údaje prostředí COMSOL budou zpracovány v programu MATLAB pro přeložení hodnot deformace na hodnoty řídicího napětí.

#### 3.1 FEM simulace kompozitní struktury

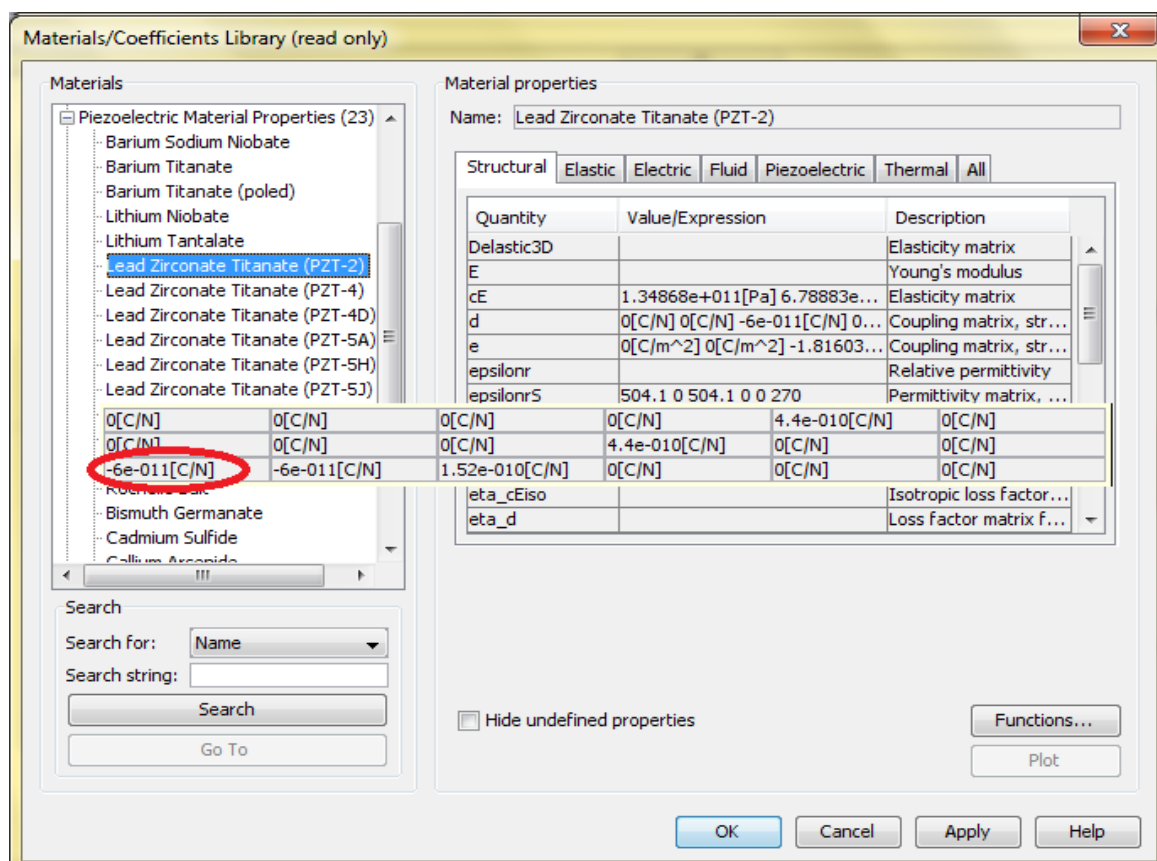
Na začátku vytvoříme geometrie modelu adaptivního prvku (viz. Obr 3.1)



Obrázek 3.1 Geometrie modelu v programu COMSOL.

Oblast R1 se představuje vrstvou křemíku (Si), oblast R2 odpovídá vrstvě PZT materiálu.

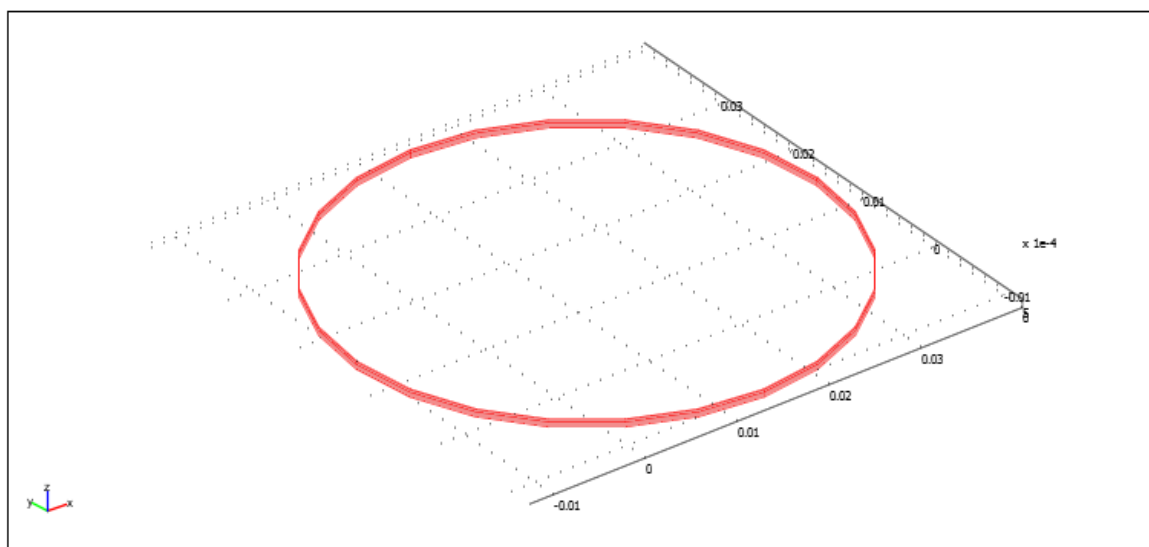
Následujícím krokem specifikování materiálových konstant v jednotlivých geometrických oblastech modelu. Pro vzorový model byl vybrán PZT–2 (Viz. Obr 3.2), který má největší piezoelektrický modul  $d_{31} = -6 \cdot 10^{-11} \text{ (C/N)}$ . Pro obrácený piezoelektrický efekt tento modul má význam poměru relativní deformaci  $\varepsilon$  k intenzitě elektrického pole  $E$ . Při největší hodnotě piezoelektrického koeficientu lze dosáhnout největší deformace PZT materiálu působením na něj menším elektrickým napětím.



Obrázek 3.2 Výběr materiálu PZT z knihovny programu COMSOL.

Pro vrchní vrstvu zvoleny vlastnosti křemíku Si.

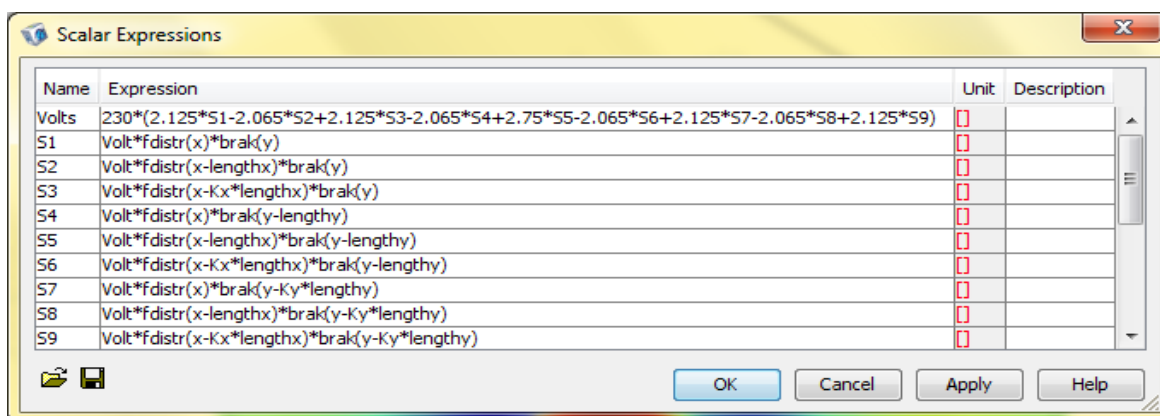
V dalším kroku je potřeba zadat okrajové podmínky. Pro boční strany adaptivního prvku (Viz Obr 3.3) určíme funkce s názvem „fixed“, která umožní specifikovat hodnotu posunutí zrcadla (tj. Dirichletova okrajová podmínka). Tímto způsobem bude docílen průhyb deformovatelného zrcadla ve směru šíření vlnoplochy.



Obrázek 3.3 Okrajové podmínky kompozitní struktury.

Dále je nutné vyřešit způsob jak dostatečně obecně a současně jednoduše zadat hodnotu elektrického napětí na povrchu piezoelektrické vrstvy pomocí vhodně definované okrajové podmínky. Pro tuto úlohu v místě spojení dvou materiálů nastavíme elektrický potenciál o hodnotě 0 (uzemnění). Na spodní straně zrcadla (na PZT) zadáme napětí, které bude určovat skalární funkce *Volts* (Viz Obr 3.4). Hodnota 230 odpovídá hodnotě počátečního napětí. Koeficienty  $k_1$  až  $k_9$  jsou určeny algoritmem korekce vlnoplochy (kapitola „Návrh algoritmu pro korekce vlnoplochy“). Pro vzorový příklad byly zvoleny následující hodnoty:

$$\begin{aligned} \text{Volts}(x, y; k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9) = \\ = \text{Volts}(x, y; 2.125, -2.065, 2.125, -2.065, 2.75, -2.065, 2.125, -2.065, 2.125) \end{aligned} \quad (24)$$

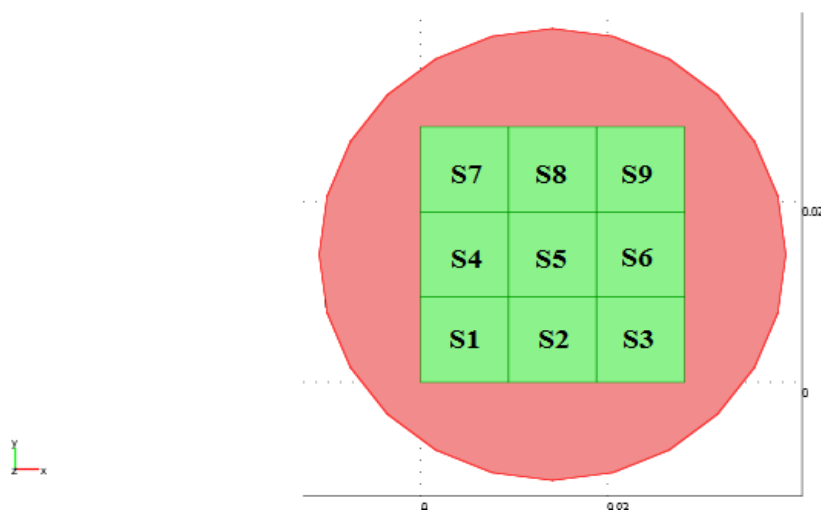


Obrázek 3.4 Funkce *Volts* v programu COMSOL.

Z výše uvedeného obrázku je vidět, že pro deformovatelné zrcadlo bylo zvoleno 9 segmentů (viz Obr 3.5) a napětí na elektrodě každého segmentu  $S_i$  je určeno funkcí

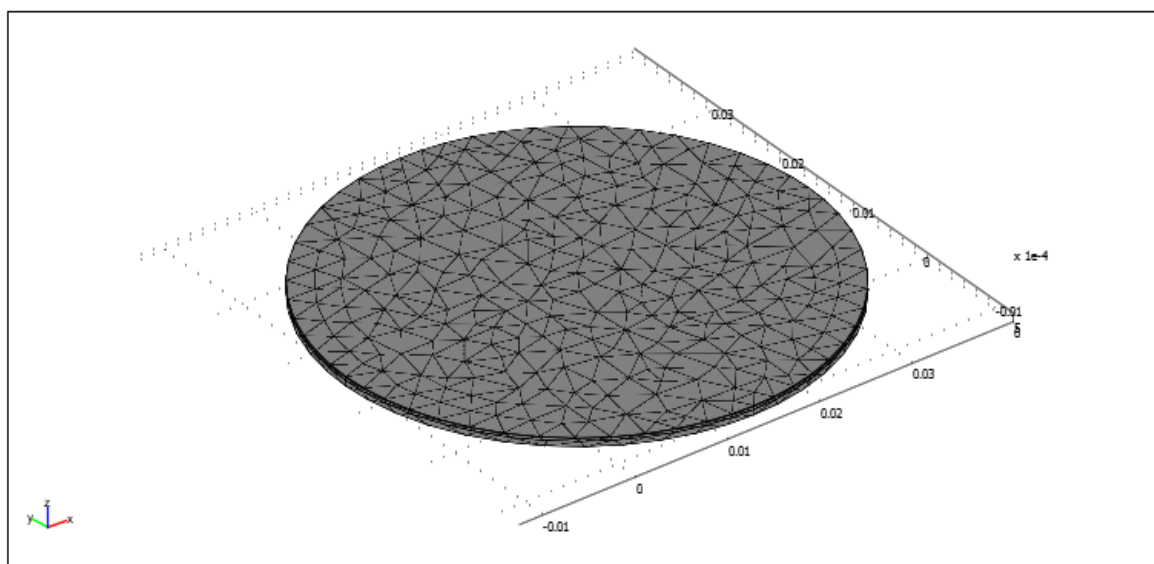
$$f_{distr}$$

a  $brak$ . Matematický význam těchto funkcí bude popsán v dalších kapitolách. Proměnné  $lengthx$  a  $lengthy$  odpovídají rozměrům pracovních ploch  $S_i$ .  $Volt$  je konstanta, která má hodnotu jednoho voltu. Konstanty  $Kx$  a  $Ky$  se rovnají 2.



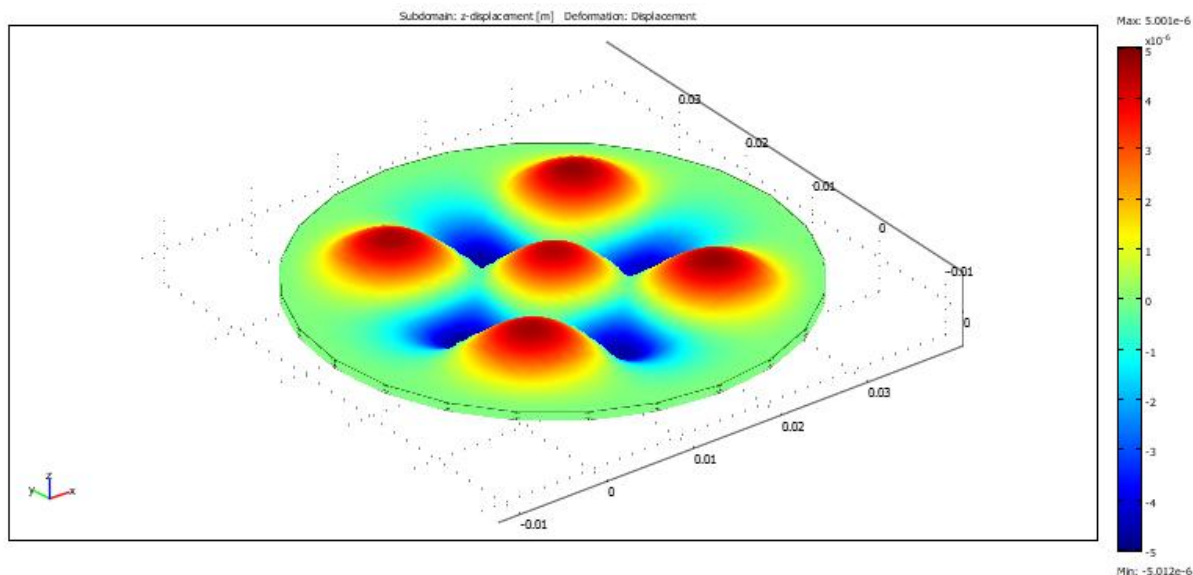
Obrázek 3.5 Rozdělení zrcadla na devět pracovních segmentů.

Následujícím bodem je diskretizace modelu pomocí metody konečných prvků (viz Obr 3.6). Princip metody spočívá v diskretizaci spojitého kontinua do určitého (konečného) počtu prvků, přičemž zjišťované parametry jsou určovány v jednotlivých uzlových bodech. Diskretizace nám umožní převést soustavu parciálních diferenciálních rovnic, které popisují fyzikální vlastnosti modelu, na soustavu algebraických (polynomiálních) rovnic. Tímto způsobem je možné přiřadit každému uzlovému bodu diskrétní struktury konkrétní hodnotu funkce  $Volt$ .

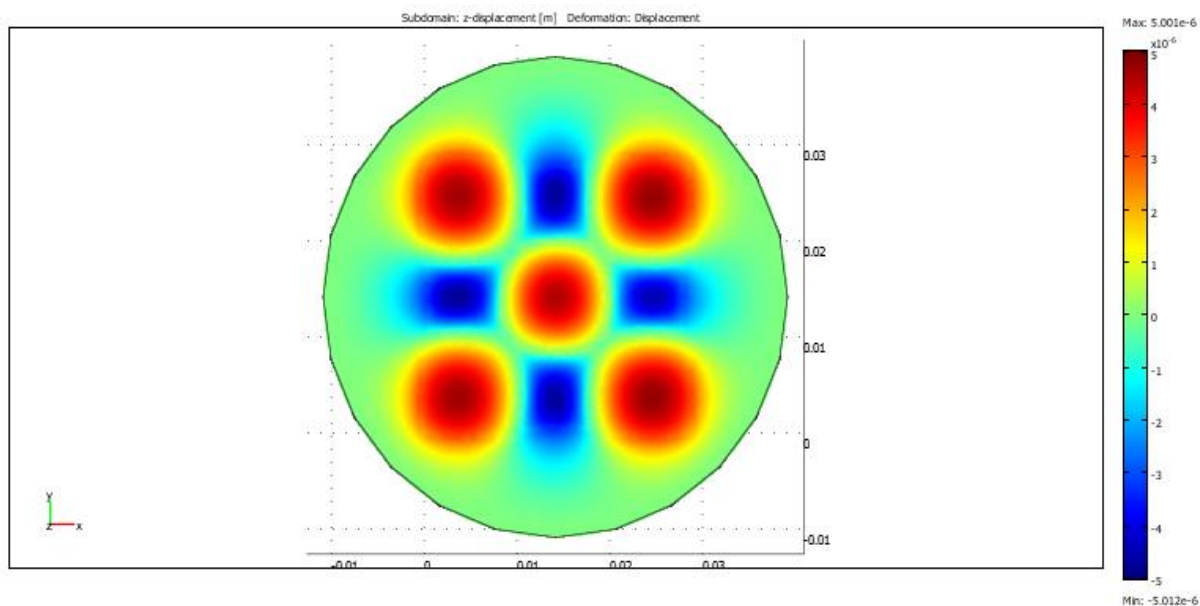


Obrázek 3.6 Diskrétní struktura modelu.

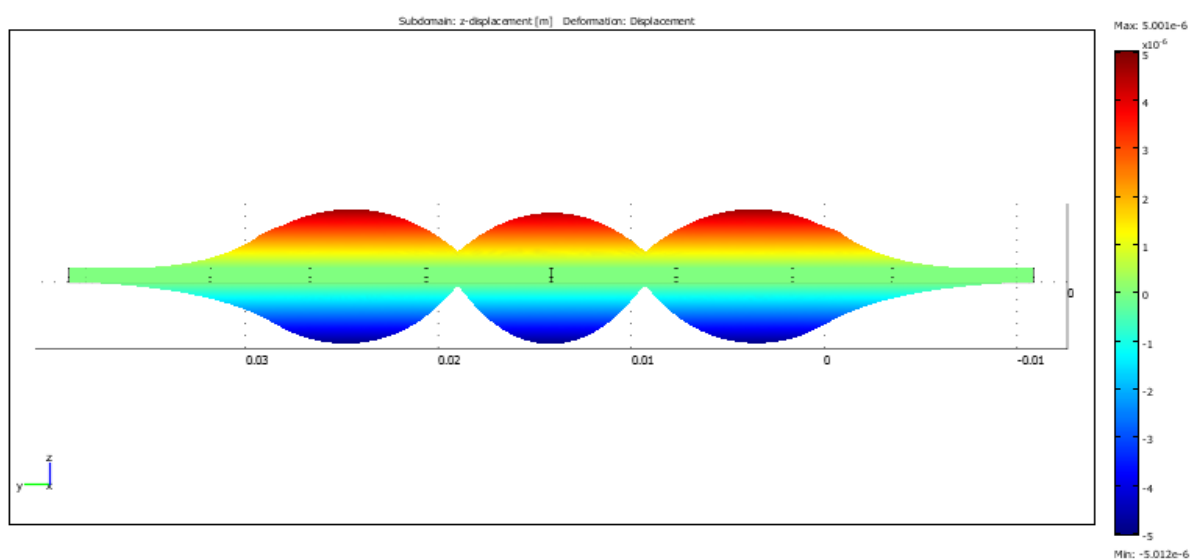
Řešení těchto algebraických rovnic se provede v posledním kroku výpočtu. Numericky vypočítané průběhy deformací, mechanických napětí a dalších stavových veličin je možné jednoduše zadat v nastavení *Plot parameters* výběrem typu grafu: *Subdomain (Z-displacement)*, *Deformed shape*, *Geometry edges*. Po dokončení výpočtu se vygenerují průběhy požadovaných stavových veličin:



Obrázek 3.7 Tvar deformovatelného zrcadla ve 3D.



Obrázek 3.8 Deformace zrcadla v rovině XY.



Obrázek 3.9 Deformace zrcadla v rovině YZ.

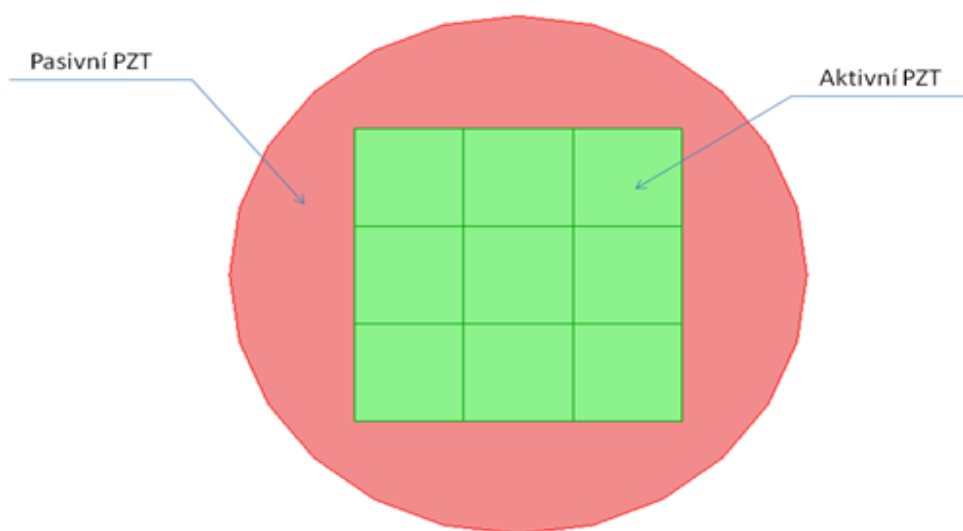
Škála z pravé strany ukazuje maximální a minimální průhyb zrcadla ve směru kolmém na jeho povrch. Pro vzorový model maximální deformace odpovídá hodnotě 5,001 mikronů, minimální posunutí se rovna  $-5,012$  mikronů.

### 3.2 Návrh optimalizaci rozměrů modelu

Cílem článku je návrh optimální geometrie (optimální poměr tlouštěk vrstev, který provede na maximální průhyb zrcadla při stejném napětí na elektrodách)

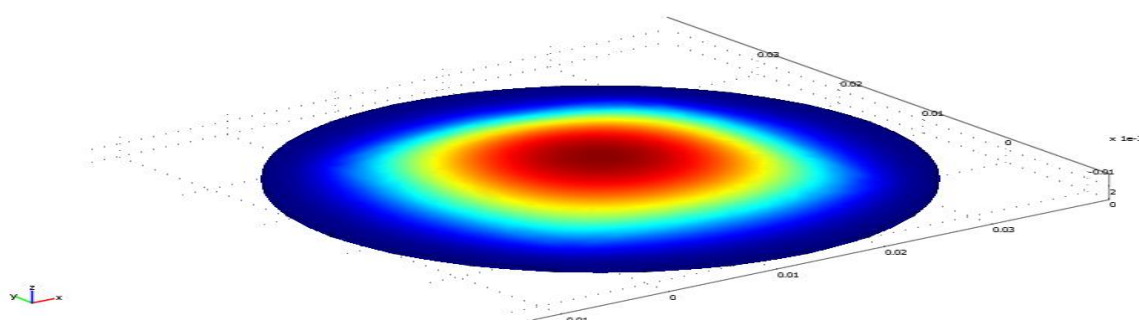
deformovatelného zrcadla. Pomoci tohoto návrhu bude nalezen poměr tloušťek piezoelektrické keramiky a křemíku pro dosažení maximální deformace modelu.

Pro řešení dané úlohy je potřeba vytvořit matematický model deformovatelného zrcadla (Obrázek 3.10). Jak v minulé kapitole rozdělím model na dvě části: na aktivní (pracovní) a pasivní plochu. Aktivní plocha se skládá z devíti bloků stejného rozměru.

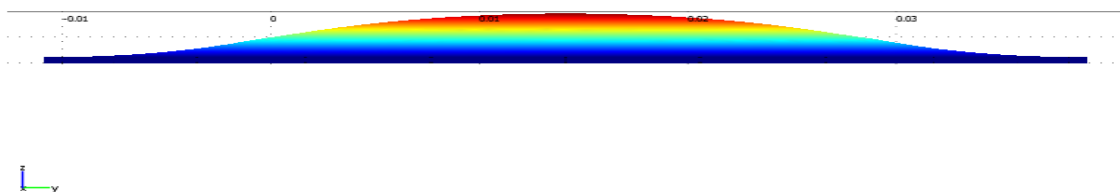


Obrázek 3.10 Matematický model deformovatelného zrcadla (pohled ze zdola).

Plocha aktivního bloku je přibližně rovna 41% od plochy celé kružnice. Na aktivní část piezoelektrického materiálu přidáme napětí o hodnotě 200 Volt. V aktivní vrstvě se transformuje elektrická energie na mechanickou. Mechanická energie se přenáší z aktivní části a dochází k deformacím pasivního segmentu a substratu (vrstva křemíku). Působením na každý segment napětím, podle principu superpozice, bude dosaženo maximálního průhybu deformovatelného zrcadla (Obrázek 3.11).



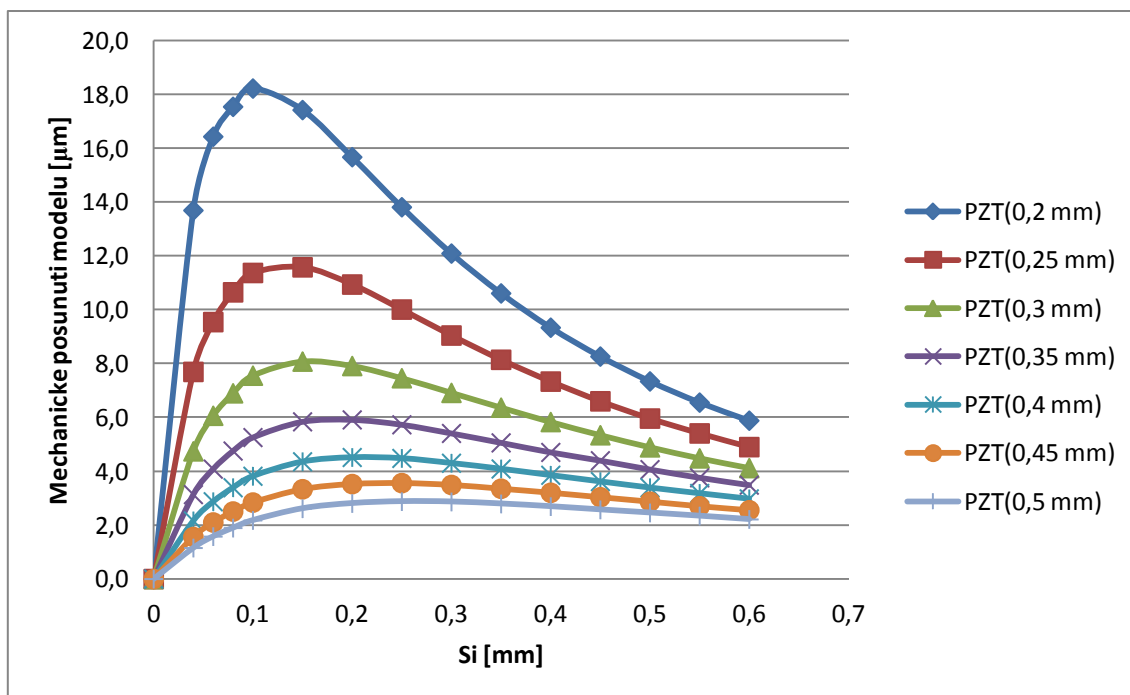
(a)



(b)

Obrázek 3.11 Maximální průhyb deformovatelného zrcadla ve 3D (a), v rovině ZY (b).

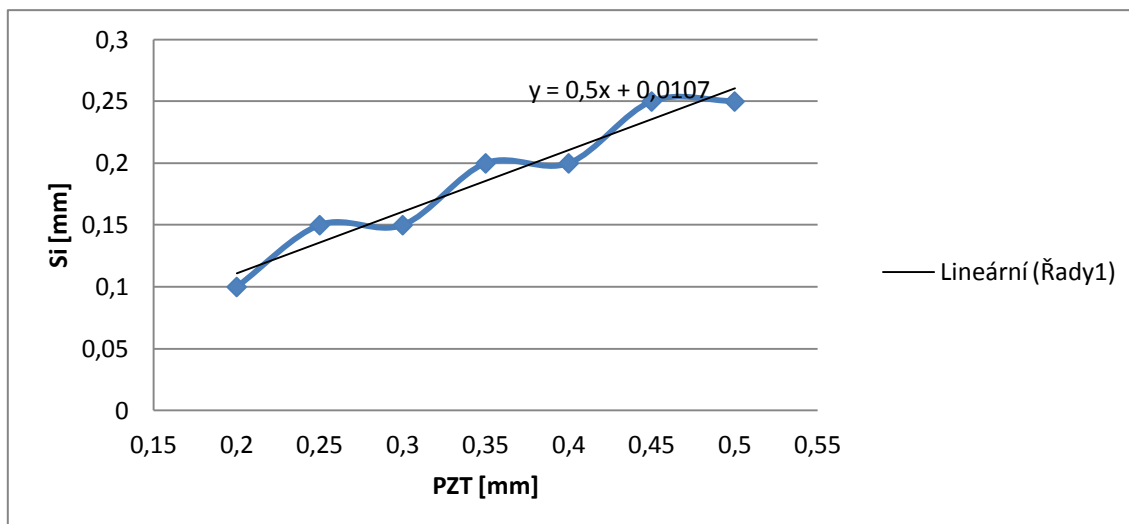
Podle hodnot deformace bude nalezen optimální poměr tloušťky PZT a Si. Pro nalezení největšího průhybu, je potřeba měnit výšku jednoho z materiálu při konstantní tloušťce druhého. Následující graf (Obrázek 3.12) znázorňuje, závislost maximálního průhybu deformovatelného zrcadla na tloušťce křemíkové vrstvy. Parametrem křivek je tloušťka piezoelektrické keramiky.



Obrázek 3.12 Závislost mechanického posunutí na tloušťce PZT a Si.

Z grafu lze zjistit extrémní body deformace a tím pádem poměr tloušťek vrstev použitých materiálů. Poměry tloušťek PZT a Si jsou znázorněny na dalším obrázku 3.13.





Obrázek 3.13 Závislost výšky PZT na tloušťce Si při maximální deformace.

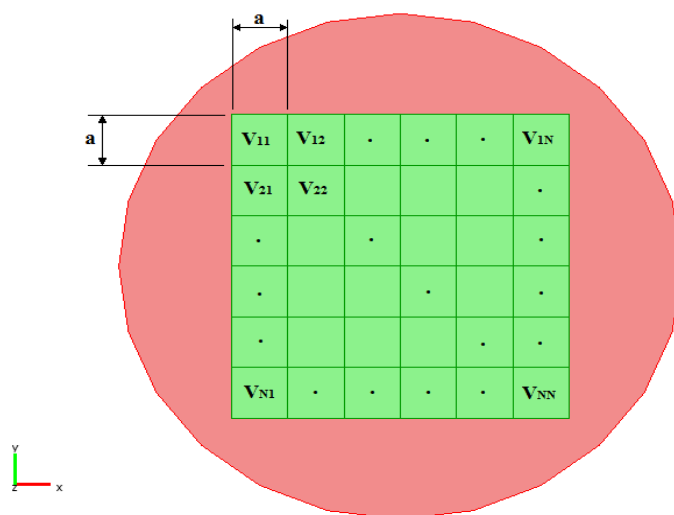
Z výše uvedeného grafu lze získat lineární závislost optimální tloušťky křemíkové vrstvy v závislosti na tloušťce vrstvy PZT. Tento vztah odpovídá rovnici:  $H_{Si} = 0,5H_{PZT} + 0,0107$  (mm).  $H_{Si}$  je tloušťka křemíku,  $H_{PZT}$  – výška keramiky. Proto pro vzorový model se používala tloušťka piezoelektrického materiálu o hodnotě 0,5 milimetrů, tloušťka křemíku odpovídala hodnotě 0,2607 milimetrů.

### 3.3 Návrh algoritmu pro korekce vlnoplochy (COMSOL & MATLAB)

V této kapitole bude popsán matematický algoritmus, který převádí hodnoty požadovaného průhybu deformovatelného zrcadla na hodnoty napětí na elektrodách jednotlivých aktivních segmentů.

Po průchodu atmosféry, deformace vlnoplochy se registruje v senzoru vlnoplochy. Informace o aberaci (tj. deformaci tvaru vlnoplochy) představuje vstupní hodnotu řídicího systému, ve kterém budou spočítána napětí na elektrodách deformovatelného zrcadla potřebná ke korekci aberace.

Rozdělme aktivní plochu PZT na  $n \times n$  segmentů (Obrázek 3.14).



Obrázek 3.14 Matematický model deformovatelného zrcadla s  $n \times n$  segmentace.

Délka segmentů bude rovna  $a$  (v závislosti od počtů segmentu bude záviset i délka její strany  $a$ ). Symboly  $V_{11}$ ,  $V_{12}$ ,  $V_{13} \dots V_{NN}$  označují obecně libovolné hodnoty napětí na elektrodách segmentů. To znamená, že prostorové rozdělení působícího elektrického napětí definujeme:

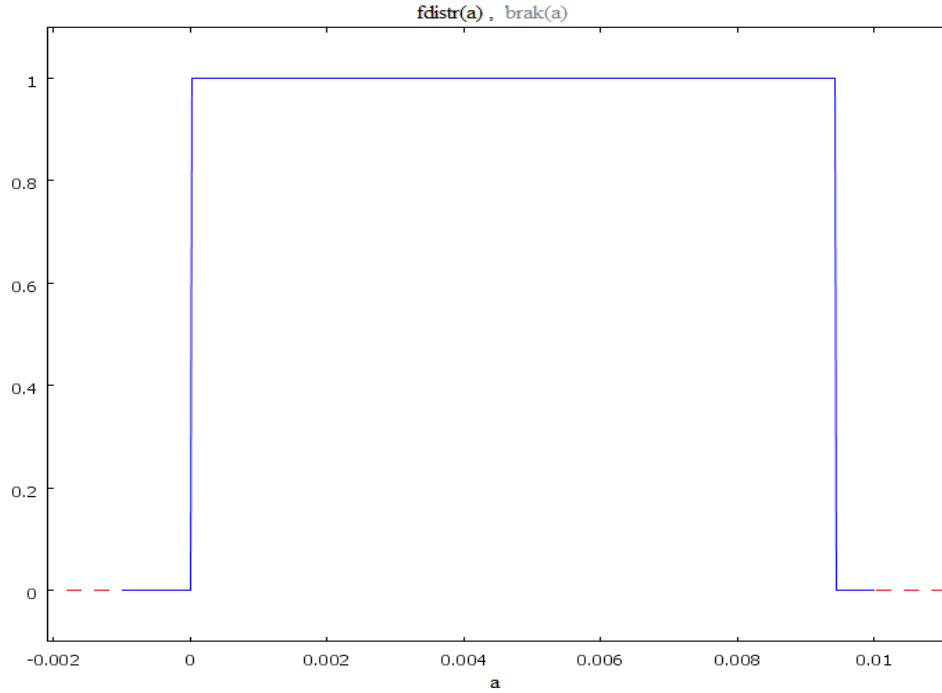
$$F(x, y; V_{11}, V_{12}, \dots, V_{NN}) = V_{11} \cdot f_{distr}(x) \cdot brak(y - a \cdot (N - 1)) + V_{NN} \cdot f_{distr}(x - a \cdot (N - 1)) \cdot brak(y) \quad (25)$$

kde funkce  $f_{distr}$  představuje funkce, která omezuje působení síly (napětí) v rozmezí od 0 do  $a$  ve směru X (26). Funkce  $brak$  má stejný význam ale platí pro směr Y (27).

$$f_{distr}(x) = \begin{cases} 0, -\infty < x < 0 \\ 1, 0 \leq x \leq a \\ 0, a < x < +\infty \end{cases} \quad (26)$$

$$brak(y) = \begin{cases} 0, -\infty < y < 0 \\ 1, 0 \leq y \leq a \\ 0, a < y < +\infty \end{cases} \quad (27)$$

Obrázek 3.15 znázorňuje, jak působí napětí, o hodnotě 1 Volt, na segment ve směru X (funkce  $f_{distr}$ ) a Y ( $brak$ ).



Obrázek 3.15 Funkce  $f_{distr}$  a  $brak$ .

Rovnice (25) popisuje prostorový průběh napětí na povrchu PZT vrstvy, která působí na PZT. Tato síla způsobí deformaci (prohnutí) segmentů  $w(x, y)$ . Funkce  $F$  je funkce, která vystupuje v COMSOLu v okrajové podmínce (boundary), kdežto funkce  $w(x, y)$  je funkce, která představuje hodnoty posunutí ve směru Z (Z-displacement). Nyní proto připravíme výpočty deformaci plochy pro každý segment. Pro  $F(x, y; 1, 0, \dots, 0)$  spočítáme deformaci a označíme ji  $w_{11}(x, y)$ , tím pádem pro  $F(x, y; 0, 1, \dots, 0)$  zjistíme funkce  $w_{12}(x, y)$  a pro  $F(x, y; 0, 0, \dots, 1)$  platí  $w_{NN}(x, y)$ . Tímto způsobem, spočítáme průhyb povrchu deformovatelného zrcadla, které je vytvořeno každým (jediným) segmentem zvlášť.

Do Matlabu se načtou hodnoty funkce  $w_{ij}(x, y)$ . Naznačíme hodnoty „žádané“ funkce  $w_{target}(x, y)$ . Nyní předpokládáme, že pomocí principu superpozice bude možné průhyb popsany funkcí  $w_{target}(x, y)$  aproximovat nějakou jinou funkcí  $w_{appr}(x, y)$ , která má tvar:

$$w_{appr}(x, y; k_{11}, k_{12}, \dots, k_{NN}) = k_{11} \cdot w_{11}(x, y) + k_{12} \cdot w_{12}(x, y) + \dots + k_{NN} \cdot w_{NN}(x, y) \quad (28)$$

kde  $k_{ij}$  je to co předpokládáme pod hodnotami napětí. Určení těchto koeficientů se provede metodou nejmenších čtverců.

1. Definujme chybovou funkci:

$$Err(k_{11}, k_{12}, \dots, k_{NN}) = \sum_{i=1}^Q (w_{\text{arg},i}(x, y) - w_{\text{appr},i}(x, y; k_{11}, k_{12}, \dots, k_{NN}))^2 \quad (29)$$

kde  $Q$  je počet hodnot funkce  $w_{ij}(x, y)$ , které vygeneruje program COMSOL.

2. Nyní spočítáme minimum funkce  $Err(k_{11}, k_{12}, \dots, k_{NN})$  vzhledem k parametrům  $k_{11}, k_{12}, \dots, k_{NN}$ . To se provede řešením soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Err(k_{11}, k_{12}, \dots, k_{NN})}{\partial k_{11}} &= 0, \\ \frac{\partial Err(k_{11}, k_{12}, \dots, k_{NN})}{\partial k_{12}} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial Err(k_{11}, k_{12}, \dots, k_{NN})}{\partial k_{NN}} &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

3. Rozepíšeme jednu z rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Err(k_{11}, k_{12}, \dots, k_{NN})}{\partial k_{11}} &= \frac{\partial}{\partial k_{11}} \left\{ \sum_{i=1}^Q (w_{\text{arg},et,i} - k_{11} \cdot w_{11,i} - k_{12} \cdot w_{12,i} - \dots - k_{NN} \cdot w_{NN,i})^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^Q \frac{\partial}{\partial k_{11}} \{ (w_{\text{arg},et,i} - k_{11} \cdot w_{11,i} - k_{12} \cdot w_{12,i} - \dots - k_{NN} \cdot w_{NN,i})^2 \} \\ &= \sum_{i=1}^Q 2(w_{\text{arg},et,i} - k_{11} \cdot w_{11,i} - k_{12} \cdot w_{12,i} - \dots - k_{NN} \cdot w_{NN,i})(-w_{11,i}) \\ &= -2 \left\{ \sum_{i=1}^Q (w_{\text{arg},et,i} w_{11,i}) - k_{11} \sum_{i=1}^Q (w_{11,i} w_{11,i}) - k_{12} \sum_{i=1}^Q (w_{12,i} w_{11,i}) - \dots - k_{NN} \sum_{i=1}^Q (w_{NN,i} w_{11,i}) \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

4. Stejným způsobem se provádí odvození ostatních rovnic. Z toho vyplývá:

$$\begin{aligned}
k_{11} \sum_{i=1}^Q (w_{11,i} w_{11,i}) + k_{12} \sum_{i=1}^Q (w_{12,i} w_{11,i}) + \dots + k_{NN} \sum_{i=1}^Q (w_{NN,i} w_{11,i}) &= \sum_{i=1}^Q (w_{target,i} w_{11,i}), \\
k_{11} \sum_{i=1}^Q (w_{11,i} w_{12,i}) + k_{12} \sum_{i=1}^Q (w_{12,i} w_{12,i}) + \dots + k_{NN} \sum_{i=1}^Q (w_{NN,i} w_{12,i}) &= \sum_{i=1}^Q (w_{target,i} w_{12,i}), \\
k_{11} \sum_{i=1}^Q (w_{11,i} w_{13,i}) + k_{12} \sum_{i=1}^Q (w_{12,i} w_{13,i}) + \dots + k_{NN} \sum_{i=1}^Q (w_{NN,i} w_{13,i}) &= \sum_{i=1}^Q (w_{target,i} w_{13,i}), \\
&\vdots \\
k_{11} \sum_{i=1}^Q (w_{11,i} w_{NN,i}) + k_{12} \sum_{i=1}^Q (w_{12,i} w_{NN,i}) + \dots + k_{NN} \sum_{i=1}^Q (w_{NN,i} w_{NN,i}) &= \sum_{i=1}^Q (w_{target,i} w_{NN,i})
\end{aligned} \tag{32}$$

Pro řešení těchto rovnic se používá Matlab. Níže uveden kód programu pro výpočet hodnot napětí pro aktuátory deformovatelného zrcadla.

```

DATA=pwd; %hledání složky, která obsahuje
           %hodnoty deformaci(w11...wNN) a
           %aberaci(wtarget)
           %(tyto hodnoty se musejí nacházet
           %ve stejné složce se souborem kódu)

A = dir(DATA); %počet souboru v hledané direktorii
l = length(A)-4; %počet funkcí typu w(x,y)
pomMat = []; %pomocná matice neurčitého rozměru
for n = 1 : 1 : l %for-cyklus pro nalezení
                  %hodnot deformací
                  %funkcí w(x,y)

    number = num2str( n );
    file = strcat('w',number,'.txt'); %čtení textových souborů
                                     %obsahujících hodnoty deformace
                                     %segmentů a aberace
                                     %elektromagnetické vlnoplochy

    s = load(file);
    q = s(:,4); %výběr jen 4 sloupce funkcí
               %w11,w12,...,wtarget

    pomMat(:,n) = q; %matice pomMat obsahuje
                   %hodnoty aberace a hodnoty
                   %deformací jednotlivých
                   %segmentů

end

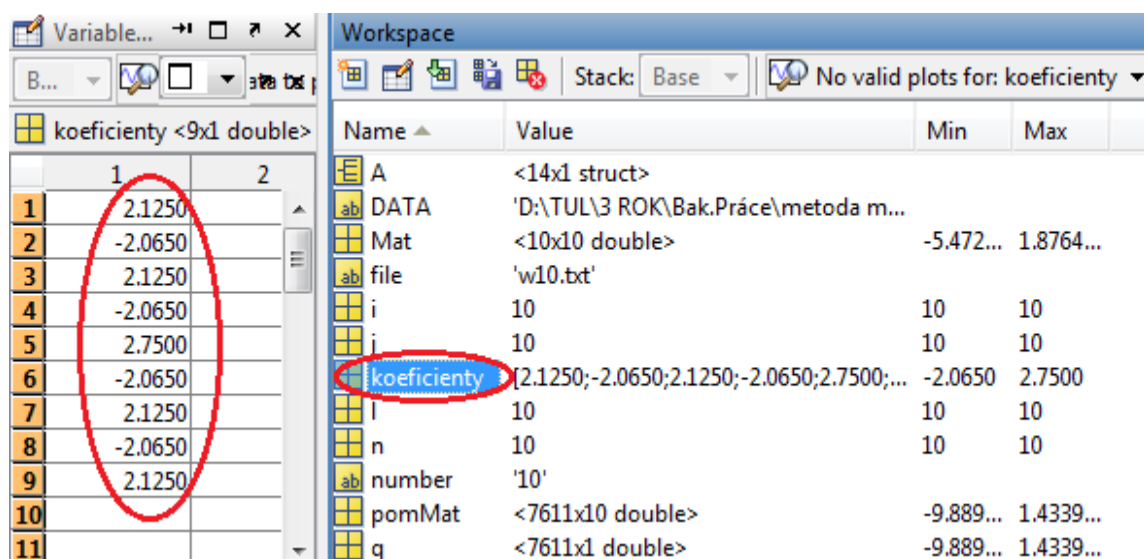
Mat = zeros(l,l); %výsledná
                 %matice

for i = 1:l:1
    for j = 1:l:1
        Mat(i,j) = Mat(i,j) + (pomMat(:,i))'*(pomMat(:,j));
        %násobení
        %funkcí w(x,y)
    end
end

koeficienty = inv(Mat(1:l-1,1:l-1))*Mat(1:l-1,l); %výsledné
                                                    %koeficienty

```

Výsledkem bude obrázek 3.16.



Obrázek 3.16 Výsledné koeficienty napětí.

Výpočet koeficientů platí pro vzorový model. Správnost hledaných koeficientu se ověřuje podle funkce „Volts“ (Obrázek 3.4).

## **Závěr**

Prvním výsledkem práce je pochopení a popis principu adaptivní optiky.

Druhým výsledkem je realizace numerického modelu deformovatelného zrcadla v simulačním prostředí COMSOL. Pomocí teorie pružnosti pevných látek, jsme nadefinovali doménové a okrajové podmínky piezoelektrických materiálů, které byly použity jako základní materiály při tvorbě adaptivního prvku optického systému. Na základě modelování byla odvozena lineární závislost optimálního (efektivního) poměru výšky PZT materiálu k tloušťce křemíku, ze kterých se skládá bimorfnní struktura deformovatelného zrcadla. Pro nejlepší znázornění, se používala PZT keramika s největším piezoelektrickým modulem, který nám umožnil při nejmenší hodnotě napětí dosáhnout největší průhyb zrcadla.

Dalším výsledkem bakalářské práce byl návrh algoritmu korekce vlnoplochy, který byl realizován v programu Matlab. Pomocí metody nejmenších čtverců, byly na základě znalosti aberace vlnoplochy určeny hodnoty napětí na jednotlivých segmentech piezoelektrické vrstvy deformovatelného zrcadla.

## Literatura

- [1] P. Půlpán, J. Erhart: *Piezoelektrické „chytré“ materiály pro elektrotechniku*, Elektro 11, 4-7 (2002).
- [2] N. Setter: *Piezoelectric materials in Devices*, Lausanne, 2002.
- [3] S. Míka, A. Kufner: *Parciální diferenciální rovnice I - Stacionární rovnice*, SNTL, Praha 1983.
- [4] R. Tyson: *Principles of Adaptive Optics, Third Edition (Series in Optics and Optoelectronics)*, CRC Press, 2011.
- [5] K. Uchino: *Ferroelectric devices*, New York, 2000.
- [6] Jason Porter, Hope M. Queener, Julianna E. Lin, Karen Thorn, Abdul Awwal: *Adaptive optics for vision science*, 2006.
- [7] Timoshenko: *Teorie pružnosti*.
- [8] *Adaptive optics guide* OKO.
- [9] M. Born, E. Wolf: *Principles of optics*, Doplnim, (1984).
- [10] M. Bass: *Handbook of optics, Optical Society of America*, (1995).
- [11] *Encyklopedie fyziky*, Martin Macháček, Praha, Mladá fronta 1995, 98 s.
- [12] *Physical properties of crystals*. J. F. Nye, M. A. Ph. D, University of Bristol, 1957.
- [13] <http://departments.fsv.cvut.cz/k102/doktorske-studium/optika-optoelektronika?prezentace>
- [14] [http://en.wikipedia.org/wiki/Zernike\\_polynomials](http://en.wikipedia.org/wiki/Zernike_polynomials)
- [15] <http://www.americanpiezo.com/knowledge-center/piezo-theory/piezoelectricity.html>